V.2 Separation der Variablen bei krummlinigen Koord.-Systemen

Unsere wichtigsten PDEs enthalten alle $\Delta = \nabla^2$.
Viele Probleme haben eine vorgegebene Symmetrie, die geeignetere Koord.-Systeme nahelegen:

$$\Delta = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 & \text{Polarkoord.} \\ \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2 & \text{Zylinderkoord.} \\ \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2 & \text{Kugelkoord.} \end{cases}$$

(1) **Bsp. Laplace-Gl. in Polarkoord.** großes "rho".

$$\Delta u(\vec r) = 0 \quad \text{mit} \quad u(\vec r) = P(\rho)\Phi(\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho P) + \frac{P}{\rho^2}\partial_\phi^2\Phi = 0 \qquad \Big|\ \frac{1}{u}\cdot = \frac{1}{P\Phi}\cdot \qquad \Big|\ \rho^2\cdot$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{P}\partial_\rho(\rho\partial_\rho P) + \frac{1}{\Phi}\partial_\phi^2\Phi = 0 \qquad \text{separierbar!}$$

$$\boxed{\frac{\rho}{P}\partial_\rho(\rho\partial_\rho P) = n^2 \quad \Big| \quad \frac{1}{\Phi}\partial_\phi^2\Phi = -n^2} \qquad n \in \mathbb{C}.$$

Sei $n \neq 0$: $\Rightarrow \Phi(\phi) = A e^{in\phi} + B e^{-in\phi}$.

und $\rho^2 P'' + \rho P' - n^2 P = 0$

$\rho(\rho P')' = \rho^2 P'' + \rho P'$

zu lösen durch Potenzreihenansatz in ρ
oder durch Substitution $\rho = e^t$.
Das führt zur Gl. $\partial_t^2 P - n^2 P = 0$

$\Rightarrow P(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$.

Um physikalisch sinnvolle Lösungen zu erhalten, muss $\Phi(\phi)$ eindeutig sein: $\Phi(\phi+2\pi) = \Phi(\phi)$.

$\Rightarrow n \in \mathbb{Z}$!!!

$$u(\rho,\phi) = (A\cos(n\phi) + B\sin(n\phi))(C\rho^n + D\rho^{-n}).$$

52a)

$x = e^t \qquad \partial_t x = x$

$y(x) \to y(e^t) \qquad \partial_t\left(\frac{1}{x}\right) = \partial_t(e^{-t}) = -\frac{1}{x}$

$$\partial_x y = \partial_t y \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$= \partial_t y \frac{1}{\partial_t x} = \frac{1}{x}\partial_t y$$

$$\partial_x^2 y = \partial_x\left(\frac{1}{x}\partial_t y\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\partial_t y + \frac{1}{x}\partial_x \partial_t y$$

$$= -\frac{1}{x^2}\partial_t y + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\partial_t^2 y\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\partial_t y + \frac{1}{x^2}\partial_t^2 y + \cancel{\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)\partial_t y}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\partial_t^2 y - 1\partial_t y\right).$$

$\Rightarrow \quad x^2 y'' + x y' - n^2 y \rightsquigarrow$

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\ddot{y} - \frac{1}{x^2}\dot{y}\right) + x\left(\frac{1}{x}\dot{y}\right) - n^2 y$$

$$= \ddot{y} - n^2 y$$

Nun noch $n=0$: $\quad \Phi''=0$ und $\quad \rho P'' + P' = 0$

bzw. $\partial_t^2 P = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi = A\phi + B \\ P = Ct + D = C\ln(\rho) + D \end{cases}$$

Eindeutigkeit $\Rightarrow A=0$

$$\Rightarrow u(\rho,\phi) = \tilde{C}\ln(\rho) + \tilde{D}$$

Superposition: $$u(\rho,\phi) = \left(C_0\ln(\rho)+D_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)\right)\cdot\left(C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}\right)$$

$n<0$ nicht nötig, da das alles nur verdoppelt.

Bem: $\ln(\rho)$ ist singulär bei $\rho=0$. Also, für eine Lsg. von der Laplace-Gl. in Gebiet V mit $\vec{0}\in V \Rightarrow C_0=0$.

Bsp: Trommel-Haut kreisförmig, Radius $\rho=a$ wo sie eingespannt ist. Rand werde vertikal um $\varepsilon(\sin(\phi)+2\sin(2\phi))$ ausgelenkt. $u(\rho,\phi)$ der ganzen Haut?

(statische Lsg, die Auslenkung bleibt zeitl. konstant)

Wellengl. $\to$ Laplace-Gl.

Gebiet V enthält $\vec{0} \Rightarrow C_0=0$

Lsg. endlich überall im Innern, also für $\rho<a$. $\Rightarrow D_n=0\ \forall n$.

Randbed:

$$u(a,\phi) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n a^n\left(A_n\cos(n\phi) + B_n\sin(n\phi)\right) = \varepsilon(\sin\phi + 2\sin 2\phi)$$

$\Rightarrow D_0=0$, $A_n=0\ \forall n$.

$C_1B_1a=\varepsilon$, $C_2B_2a^2=2\varepsilon$, $B_n=0\ \forall n>2$.

$$\Rightarrow u(\rho,\phi) = \frac{\varepsilon\rho}{a}\sin\phi + \frac{2\varepsilon\rho^2}{a^2}\sin(2\phi)$$

$$= \varepsilon\frac{\rho}{a}\left(\sin\phi + 2\frac{\rho}{a}\sin(2\phi)\right).$$

(54)

(2) Laplace-Gl. in Zylinderkoord.

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\,\partial_\rho u) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 u + \partial_z^2 u = 0, \qquad u = P(\rho)\,\Phi(\phi)\,Z(z)$$

1. Schritt: $\Big|\ \frac{1}{u}\cdot = \frac{1}{P\Phi Z}\cdot$

$$\frac{1}{P\rho}\partial_\rho(\rho\,\partial_\rho P) + \frac{1}{\Phi\rho^2}\partial_\phi^2\Phi + \frac{1}{Z}\partial_z^2 Z = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{Z}Z'' = k^2 \ \Big|\ \frac{1}{P\rho}\partial_\rho(\rho\,\partial_\rho P) + \frac{1}{\Phi\rho^2}\partial_\phi^2\Phi + k^2 = 0} \quad \Big|\rho^2\cdot$$

$$Z(z) = E\,e^{-kz} + F\,e^{kz}.$$

$$\frac{\rho}{P}\partial_\rho(\rho\,\partial_\rho P) + \frac{1}{\Phi}\partial_\phi^2\Phi + k^2\rho^2 = 0$$

2. Schritt $\boxed{\frac{1}{\Phi}\Phi'' = -m^2 \ \Big|\ \rho\,\partial_\rho(\rho\,\partial_\rho P) + (k^2\rho - m^2)P = 0}$

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} C\cos m\phi + D\sin m\phi & m \neq 0 \\ C\phi + D & m = 0 \end{cases}$$

Eindeutigkeit $\rightsquigarrow m \in \mathbb{Z}$

Axial-Symmetrie der Lsg: $C = 0$, etc.

es gibt auch kontrolliert mehrwertige Lösungen mit physikalischer Bedeutung (Elektrodynamik, Potentiale in Magnetfeldern).

Mit $\mu = k\rho$ wird die Gl. für $P(\rho)$ zur Besselgleichung:

$$P(\rho) = A\,J_m(k\rho) + B\,Y_m(k\rho)$$

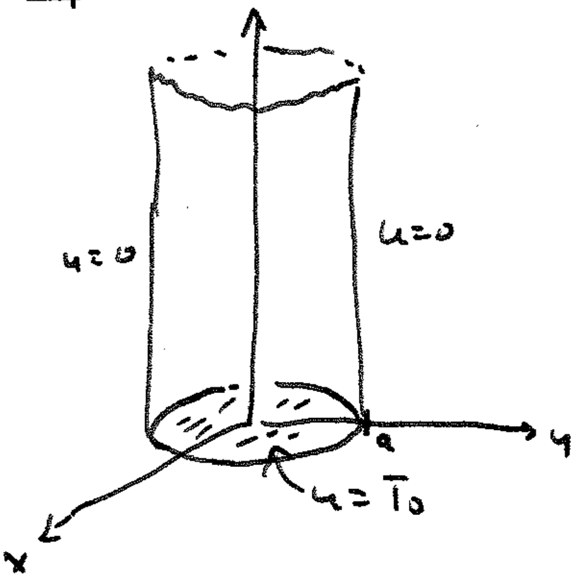
Bessel-Fkt. $J_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2n}$

$Y_m(k\rho)$ singulär für $\rho = 0 \Rightarrow B = 0$ falls Lösung für Gebiet V mit $\{\rho=0\text{-Achse}\} \in V$ gesucht wird.

$$u(\rho,\phi,z) = \left[A\,J_m(k\rho) + B\,Y_m(k\rho)\right]\left[C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi)\right]\left[E\,e^{-kz} + F\,e^{kz}\right]$$

Wich: Superposition!

Bsp.



Halb-∞ Zylinder,
Bodenplatte auf Temp T_0,
Mantel auf Temp 0.
Gleichgewichts-Temp-Verteilung?

o.B.d.A. Bodenplatte bei $z=0$.
u endlich innerhalb $\{\rho<a,\ z>0\}$
$\Rightarrow B = F = 0$.

Axial-symmetr. Randbedingung $\Rightarrow$ Lsg u auch axialsymmetrisch
$\Rightarrow m=0$

$$\Rightarrow u(\rho,\phi,z) = \sum_k \tilde{A}_k J_0(k\rho) e^{-kz}$$
für alle erlaubten Werte der Separationskonstante k.

$$u(\rho=a,\phi,z)=0 \Rightarrow J_0(ka)=0$$

Wir brauchen die Nullstelle von $J_0(x)$ aus Maple / Bücher, ...
[$J_0(x)=0$ für $x = 2.40\ldots,\ 5.52\ldots,\ 8.65\ldots,\ \ldots$]

Setze k_n so, daß $J_0(k_n a)=0$, $n=1,2,3,\ldots$

$$u(\rho,\phi,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n\rho) e^{-k_n z}.$$

Also $u(\rho,\phi,0)=T_0$:

$$u(\rho,\phi,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n\rho) = T_0.$$

Es gilt (z.B.) $\int_0^a \rho J_0(k_n\rho) J_0(k_m\rho)\, d\rho = 0 \quad \forall m\neq n$.

$$\longrightarrow A_n = \frac{2}{a^2}\frac{1}{J_1^2(k_n a)} T_0 \int_0^a J_0(k_n\rho)\rho\, d\rho$$

Es gilt: $\partial_z(z J_1(z)) = z J_0(z)$

$$\longrightarrow \int_0^a J_0(k_n\rho)\rho\, d\rho = \left[\frac{1}{k_n}\rho J_1(k_n\rho)\right]_0^a = \frac{1}{k_n} a J_1(k_n a)$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{2T_0}{a^2 J_1^2(k_n a)} \frac{a J_1(k_n a)}{k_n} = \frac{2T_0}{k_n a J_1(k_n a)}$$

3 Laplace-Gl. in Kugelkoord.

$$\left[\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]u = 0 \qquad (*)$$

$u = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$ einsetzen in $(*)$, $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}\cdot$ durchmultiplizieren von $(*)$:

$$\frac{1}{R}\partial_r(r^2\partial_r R) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\Theta) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\partial_\phi^2\Phi = 0$$

1. Schritt: $\boxed{\frac{1}{R}\partial_r(r^2\partial_r R) = \lambda \;\Big|\; \frac{1}{\Theta\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\Theta) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\partial_\phi^2\Phi = -\lambda}$

$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \qquad R(r) = R(e^t) = S(t)$ substituieren

$\ddot S + \dot S - \lambda S = 0$ hat Lösung

$S(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$.

also $R(r) = Ar^{\lambda_1} + Br^{\lambda_2}$ mit $\lambda_{1,2}$ Lösung von $x^2 + x - \lambda = 0$:

$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 + x - \lambda$

$x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = x^2 + x - \lambda$

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2 &= -1\\ \lambda_1\lambda_2 &= -\lambda\end{aligned}}$$

Setze $\lambda_1 = l$, $\lambda_2 = -(l+1)$ mit $\lambda = l(l+1)$

$l = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow u(r,\theta,\phi) = (Ar^l + Br^{-(l+1)})\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$.

2. Schritt: $$\underbrace{\frac{\sin\theta}{\Theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\Theta\right) + l(l+1)\sin^2\theta}_{+m^2} + \underbrace{\frac{1}{\Phi}\partial_\phi^2\Phi}_{-m^2} = 0$$

$$\Phi(\phi) = \begin{cases} C\cos(m\phi) + D\sin(m\phi), & \text{Eindeutigkeit } m\in\mathbb{Z},\ m\neq 0\\ C\phi + D & m = 0.\end{cases}$$

wie bei Zylinder-koord.

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\Theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\Theta) + l(l+1)\sin^2\theta = m^2.$$

Substitution $\mu = \cos\theta$. $\partial_\theta\mu = -\sin\theta$

Also $\partial_\theta = (\partial_\theta \mu)\,\partial_\mu = (\partial_\theta \cos\theta)\,\partial_\mu$

$$= -\sin\theta\,\partial_\mu$$

$$= -\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\partial_\mu$$

$$= -\sqrt{1-\mu^2}\,\partial_\mu .$$

Setze $\Theta(\theta) = M(\mu)$:

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu\left[(1-\mu^2)\,\partial_\mu M\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right] M = 0$$

assoziierte Legendre-Gl.

$M(\mu) = E P_\ell^m(\mu) + F Q_\ell^m(\mu)$ mit

$P_\ell^m(\mu) = (1-\mu^2)^{|m|/2} \dfrac{d^{|m|}}{d\mu^{|m|}} P_\ell(\mu)$ und ähnlich für Q_ℓ^m.

↑ Legendre-Polynome $\boxed{P_\ell(z) = \dfrac{1}{2^\ell \ell!} \dfrac{d^\ell}{dz^\ell} (z^2-1)^\ell}$

$m \in \mathbb{Z}$, $0 \le |m| \le \ell$.

Wenn die Lsg der Laplace-Gl. für $\mu = \cos\theta = \pm 1$ endlich sein soll, (also auf der Polarachse $\theta = 0, \pi$) dann ist $F = 0$, da die $Q_\ell^m(\mu)$ für $\mu = \pm 1$ divergieren.

bei $\cos\theta = \pm 1$

Soll die Lsg im Unendlichen endlich sein, muss sie Polynomiell sein $\longrightarrow$ $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell \ge 0$.

$$\Rightarrow \quad u(r,\theta,\phi) = \left[A r^\ell + B r^{-(\ell+1)}\right]\left[C \cos m\phi + D \sin m\phi\right]\left[E P_\ell^m(\cos\theta) + F Q_\ell^m(\cos\theta)\right]$$

$\ell \in \mathbb{Z}_+$

$m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell$

Superposition!

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A r^\ell + B r^{-(\ell+1)}\right) \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left(\tilde{C} \cos m\phi + D \sin m\phi\right) P_\ell^m(\cos\theta)$$

für Lsgn, die bei $\theta = 0, \pi$ regulär sind.

Bsp: Ungeladene leitende Kugeloberfläche, Radius a, am Ursprung in einem anfangs konstanten elektrostat. Feld $\vec{E}$.
Zu zeigen: Sphäre verhält sich als Dipol.

Bew: Elektrostat. Potential eines konstanten elektr. Feldes $\vec{E} = E\hat{e}_z$:

$u = -Ez = -Er\cos\theta$,
mit der beliebigen Normierung $u=0$ für $z=0$.
Das erfüllt natürlich $\Delta u = 0$.
Gesucht: Potential v für den Fall, dass die Sphäre präsent ist:
$\Delta v = 0$ muss ebenfalls gelten, außerdem Randbed:
$v(r) = -Er\cos\theta$ für $r \to \infty$.
Axialsymmetr. Problem: $m=0$.
v endlich auf Polarachse: $F=0$.

$$\Rightarrow v(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$$

$v(r\to\infty) = -Er\cos\theta$ legt nahe, dass die (θ,φ)-Abhängigkeit von v wie $P_1^0(\cos\theta) = P_1(\cos\theta) = \cos\theta$ geht.

$$\Rightarrow v(r,\theta,\varphi) = \left(A_1 r + B_1 r^{-2}\right) P_1(\cos\theta)$$

$v(r\to\infty) = -Er\cos\theta \Rightarrow A_1 = -E$

$$\Rightarrow v(r,\theta,\varphi) = \left(-Er + \frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta$$

Sphäre leitend $\Rightarrow$ Sphäre = Äquipotential~~linie~~fläche
$\Rightarrow$ v kann für $r=a$ nicht von θ abhängen.
$\Rightarrow \frac{B_1}{a^2} \doteq Ea$

$$\Rightarrow v(r,\theta,\varphi) = -Er\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta$$

Dipol-Moment p hat Potential $\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ✓

Sphäre verhält sich als Dipol mit Moment $4\pi\varepsilon_0 a^3 E$